УРАВНЕНИЯ СЛОИСТОГО ПАКЕТА С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА И ОБЖАТИЯ

Л. В. Баев, Ю. М. Волчков

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук (ИГиЛ СО РАН),
volk@hydro.nsc.ru

Необходимость определения напряженно-деформированного состояния слоистых пластин и оболочек и тем самым построение соответствующих математических моделей вызывается тем, что такие пластины и оболочки являются составной частью большинства конструкций в течении уже многих лет. Первые работы по теории слоистых пластин и оболочек относятся к концу сороковых годов XX века и были основаны на принятии гипотез Кирхгоффа-Лява ко всему многослойному пакету. Очевидно, что на основе таких теорий можно получить удовлетворительные результаты только в том случае, если свойства слоев незначительно отличаются друг от друга. Если же свойства слоев существенно различаются, то учет поперечных сдвигов и обжатия для адекватности модели становится обязательным. Учет поперечных сдвигов и обжатия производится за счет принятия некоторых законов распределения по толщине слоев продольных и поперечных смещений [1, 2]. Как правило, если речь идет о многослойных пластинах и оболочках, используемых в различных конструкциях, то геометрия слоев, их свойства и функциональное предназначение известны. Это в некоторой степени облегчает построение соответствующих уравнений. Так, одним из распространенных типов слоистых оболочек являются трехслойные оболочки, состоящие из двух тонких несущих слоев и заполнителя. Свойства и функциональное предназначение этих слоев совершенно различные. Поэтому для такой оболочки можно построить удовлетворительную модель, учитывая поперечные сдвиги и обжатие только для заполнителя [2].

Иным образом обстоит дело, если речь идет о расчете напряженно-деформированного состояния слоистого горного массива. В этом случае геометрия и свойства этого пакета предопределены самой природой. Толщины и свойства этих слоев могут быть такими, что необходимо будет учитывать поперечные сдвиги и обжатие в каждом слое.

В данной работе предлагается модель, учитывающая и поперечные сдвиги и обжатие в каждом слое в рамках обобщения гипотезы Тимошенко на поперечные перемещения. Для произвольного числа трансверсально-упругих слоёв получены уравнения равновесия при заданных распределениях (линейных и нелинейных по z) продольных и поперечных перемещений.

Для учёта поперечных сдвигов в каждом слое принимается для трансверсальных перемещений обобщенная кинематическая гипотеза Тимошенко

$$u_k^\alpha(x,y,z) = u_0^\alpha(x,y) + \sum_{m=1}^{k-1} v_m^\alpha(x,y) + \phi_k\left(\frac{z-H_{k-1}}{h_k}\right) v_k^\alpha(x,y). \tag{1}$$

Для учёта обжатия (деформаций по толщине пластины)принимается следующее распределение поперечных смещений:

$$w_k(x,y,z) = w_0(x,y) + \sum_{m=1}^{k-1} \omega_m(x,y) + f_k\left(\frac{z-H_{k-1}}{h_k}\right) \omega_k(x,y). \tag{2}$$

В (1), (2) $u_k^\alpha(x,y,z)$ — продольное перемещение в k-ом слое в направлении α;

$u_0^\alpha(x,y)$ — продольное перемещение при $z=0$; $v_k^\alpha(x,y)$ — приращение продольного перемещения на k-ом слое; $w_k(x,y,z)$ — поперечное перемещение точек в k-ом слое; $w_0(x,y)$ — поперечное перемещение при $z=0$ (прогиб нижней плоскости); $\omega_k(x,y)$ — приращение перемещения по толщине на k-ом слое; $\zeta_k = (z-H_{k-1})/h_k$ — относительная поперечная координата в k-ом слое, $H_k = \sum_{m=1}^{k} h_m$, $t_k = h_k / h$.

Каждый трансверсально-изотропный слой имеет пять независимых упругих констант, за которые можно взять E, ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона в плоскости слоя, E_z, G_z-модуль Юнга, модуль сдвига и $\nu_{13}=\nu_{23}$ или $\nu_{31}=\nu_{32}$ коэффициент Пуассона в поперечном направлении. В силу симметрии матрицы коэффициентов в законе Гука $\frac{\nu_{31}}{E}=\frac{\nu_{13}}{E_z}$, $\frac{\nu_{32}}{E}=\frac{\nu_{23}}{E_z}$. Удобство выбора трансверсальной изотропности слоёв заключается в возможности пренебрегать поперечными сдвигами или обжатием в слое путем устремления G_k^z или E_k^z к бесконечности. Приняв же $\nu_k^{\alpha 3} = \nu_k^{3\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1;2)$, мы пренебрегаем эффектом Пуассона от напряжений σ_k^{33} в плоскости слоя и напряжений σ_k^{11}, σ_k^{22} в направлении оси z, и в то же время, учитываем поперечные деформации ε_k^{33} внутри каждого слоя.

Уравнения равновесия и одновременно естественные граничные условия, соответствующие принятым кинематическим гипотезам получаются с использованием принципа возможных перемещений, который в данном случае принимает вид:

$$\delta(A_e + A_i) = 0.$$

Здесь δA_e - суммарная виртуальная работа внешних сил, а $\delta A_i = -\delta P$ - внутренних упругих сил (P-потенциальная энергия упругих сил). Введение упрощающих гипотез равносильно наложению кинематических связей, поэтому виртуальные перемещения должны быть согласованы с ними.

В работе выведены уравнения равновесия как усилиях и моментах, так и в перемещениях. Получены выражения усилий и моментов через обобщенные перемещения.

В работе также обсуждаются варианты уравнений, которые получаются при выборе различных аппроксимирующих функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пелех Б.Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наукова Думка,1973. 248с.

2. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трёхслойных оболочек
М: Машиностроение, 1973. 172с.

3. *Господариков А.П.* Об оседании слоистой кровли над выработкой// Сб. Мат. модели и методы МСС (к 60 летию А.А.Буренина), г. Владивосток, 2007. С. 52-64.